

Unidad 5

Interpolación

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

1

Unidad 5 - Interpolación

Aproximación funcional e Interpolación

Representación mediante funciones analíticas sencillas de:

- Información discreta (resultante de muestreos).
- Funciones complicadas.

siendo $y_k = f(x_k)$ una cierta función de la que no se conoce una fórmula explícita, o bien es muy complicada para evaluarla, derivarla, integrarla, hallarle ceros, etc.

Si la información se representa mediante un polinomio $p_n(x)$ en un intervalo dado, nos referimos a:

Aproximación Polinomial o Interpolación Polinomial

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

2

Unidad 5 - Interpolación

Aproximación de una función por polinomios de Taylor

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- La precisión aumenta cuando aumentan la cantidad de términos (n).
- Necesidad de conocer f y las n derivadas de f en x_0 .
- La aproximación es mejor en valores cercanos a x_0 .
- Necesidad de restringir el valor $|x - x_0|$.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

3

Unidad 5 - Interpolación

Interpolación

Interpolación significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado.

Dados $n + 1$ puntos en $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, con $y_i = f(x_i)$ (siendo $f(x)$ no necesariamente conocida) en los cuales $x_0, x_1, \dots, x_n$ son números distintos que se distribuyen en el intervalo $[x_0, x_n]$, se quiere encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual a n tal que:

$$p_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Si para estimar un valor y , se emplea el polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual a n que pasa por los puntos dados, la aproximación se denomina **interpolación polinomial (lineal**, cuando sólo se emplean dos puntos) y a $p_n(x)$ se lo denomina **polinomio de interpolación o polinomio interpolante**.

Para un valor x distinto de los dados:

- Si $x_0 < x < x_n$ entonces y será un **valor interpolado**.
- Si $x < x_0$ o $x_n < x$ entonces y será un **valor extrapolado**.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

4

Unidad 5 - Interpolación

Polinomio interpolante

Dados $n + 1$ puntos, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, con valores $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos, existe un **único** polinomio de grado menor o igual que n que pasa por esos puntos.



Son varios los métodos que se pueden usar para construir el polinomio de interpolación:

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales para hallar sus coeficientes.
- Usar polinomios de Lagrange.
- Construir una tabla de diferencias divididas para emplearla con los coeficientes del polinomio de Newton.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

5

Unidad 5 - Interpolación

Existencia del polinomio único

Si en los $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, los valores $x_0, x_1, \dots, x_n$ son números distintos, existe un **único** polinomio de grado menor o igual que n tal que $p_n(x_k) = y_k$, con $k = 0, 1, \dots, n$ entonces existen números reales únicos $a_0, a_1, \dots, a_n$ tales que:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

El sistema anterior, de $n + 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$, escrito en forma matricial $AX = b$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Si $\det(A) \neq 0$ el sistema tiene solución **única**.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

6

Unidad 5 - Interpolación

Determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 1 & x_2 + x_0 \end{bmatrix}$$
$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

En general:

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

Determinante de Vandermonde

Si $x_i \neq x_j$ entonces $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto el sistema considerado tiene **solución única**.

Por lo general, la matriz de coeficientes de este sistema resulta mal condicionada si dos abscisas están relativamente cerca.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

7

Unidad 5 - Interpolación

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

En interpolación lineal, la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , posee una pendiente:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Si se considera la ecuación de la recta de la forma $y = m(x - x_0) + y_0$ se obtiene:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0 = p(x)$$

Reordenando los términos:

$$p(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Evaluando $p(x)$ en los puntos dados x_0 y x_1 :

$$y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 + (y_1 - y_0) * 0 = y_0$$
$$y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 + (y_1 - y_0) * 1 = y_1$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

8

Unidad 5 - Interpolación

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

Lagrange propone un polinomio equivalente:

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = p_1(x)$$

Coeficientes de Lagrange

donde los coeficientes de Lagrange se denotan:

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Además:

$$L_{1,0}(x_0) = 1, L_{1,0}(x_1) = 0, L_{1,1}(x_0) = 0, L_{1,1}(x_1) = 1$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

9

Unidad 5 - Interpolación

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

Para tres puntos x_0, x_1, x_2 se tiene:

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

donde:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

son los **Polinomios Fundamentales de Lagrange**.

El polinomio $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$ se denomina **Polinomio de Interpolación de Lagrange** o **Forma de Lagrange del polinomio interpolante** para los datos dados.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

10

Unidad 5 - Interpolación

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

En general:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

donde:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Para $n + 1$ puntos, los polinomios fundamentales de Lagrange L_i son de grado n .

Además:

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \quad \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \text{ para cada } x_k$$

Cota de error

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \right|$$

donde $\xi(x)$ es un número que depende de x y $\xi(x) \in [x_0, x_n]$.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

11

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo 1

Aproximar la función $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado dos.

Se consideran los puntos $x_0 = -\frac{\pi}{2}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$ entonces:

$$f(x_0) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(x_1) = \cos(0) = 1, \quad f(x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces:

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = 0 * L_0(x) + 1 * L_1(x) + 0 * L_2(x) = L_1(x)$$

donde:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{-\frac{\pi^2}{4}} = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2$$

Por lo tanto:

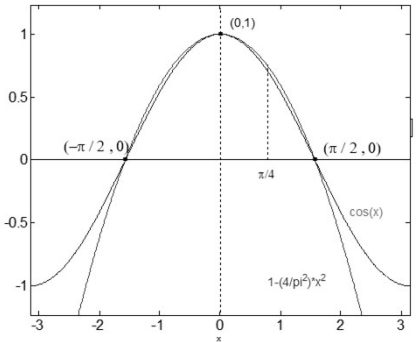
$$p_2(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

12

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo 1



$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$
$$p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$
$$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - p_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = |0,7071 - 0,75| = 0,0429$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

13

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo 1

Cota de error:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \right|$$

Entonces:

$$E(x) = \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f'''(\xi(x)) \right| = \left| \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{6} f'''(\xi(x)) \right|$$

Calculamos las derivadas:

$$f(x) = \cos(x), \quad f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \sin(x)$$

donde: $|f'''(x)| = |\sin(x)| \leq 1$ para todo $\xi(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Para $x = \frac{\pi}{4}$ se tiene que:

$$\left|E\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{6} \left| \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{4}\right) \right| = \frac{\pi}{24} \left(\frac{3\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^3}{128} = 0,242$$

Error Real: 0,0429

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

14

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo 2

Use los polinomios interpolantes de Lagrange de grados uno, dos y tres, **más apropiados**, para aproximar $f(2.5)$.

Si $f(2.0) = 0.5103757$, $f(2.2) = 0.5207843$, $f(2.4) = 0.5104147$, $f(2.6) = 0.4813306$ y $f(2.8) = 0.4359160$, el polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno, más apropiado, es el que se obtiene tomando los nodos $x_0 = 2.4$ y $x_1 = 2.6$

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$
$$p_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
$$p_1(x) = 0.5104147 \frac{x - 2.6}{2.4 - 2.6} + 0.4813306 \frac{x - 2.4}{2.6 - 2.4}$$
$$p_1(x) = 0.859421 - 0.145420x$$
$$p_1(2.5) = 0.4958727 \approx f(2.5)$$

Para $p_2(x)$ hay dos polinomios apropiados:

- el que pasa por los nodos $x_0=2.2$, $x_1=2.4$, $x_2=2.6$
- el que pasa por los nodos $x_0=2.4$, $x_1=2.6$, $x_2=2.8$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

15

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo 2

Si usamos todos los puntos:

(2,0.5103757)
(2.2,0.5207843)
(2.4,0.5104147)
(2.6,0.4813306)
(2.8,0.4359160)

Obtenemos un polinomio de grado 4 de la siguiente manera:

$$p_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$
$$p_4(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

16

Unidad 5 - Interpolación

Polinomio interpolante de Newton

Hay ocasiones en las que resulta útil construir varios polinomios aproximantes $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ y después elegir el más adecuado según las necesidades.

Si se utiliza los polinomios interpolantes de Lagrange, uno de los inconvenientes es que no hay relación entre la construcción de $p_{k-1}(x)$ y $p_k(x)$. Cada polinomio debe construirse individualmente y el trabajo necesario para calcular polinomios de grado elevado requiere hacer muchas operaciones.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

17

Unidad 5 - Interpolación

Polinomio interpolante de Newton

El polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n que interpola a f en los datos dados, puede expresarse en la forma:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Se sabe que $p_n(x_k) = y_k = f(x_k)$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Para determinar los coeficientes $b_0, b_1, \dots, b_n$ despejamos de la siguiente manera:

- $p_n(x_0) = b_0 = f(x_0) \Rightarrow b_0 = f(x_0)$
- $p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
- $p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \Rightarrow b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \Rightarrow$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

18

Unidad 5 - Interpolación

Diferencia dividida hacia adelante (progresiva) de Newton

a) La diferencia dividida cero de f con respecto a x_k es:

$$f[x_k] = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

b) La diferencia dividida uno de f con respecto a x_k y x_{k+1} es:

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

c) La diferencia dividida dos de f con respecto a x_k, x_{k+1} y x_{k+2} es:

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2$$

d) En general, se definen las $n - i + 1$ diferencias divididas i (progresivas) de f con respecto a $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}$ como:

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - i$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

19

Unidad 5 - Interpolación

El **polinomio interpolante progresivo** es de la forma:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

El **polinomio interpolante regresivo** es de la forma:

$$p_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_n) \dots (x - x_1)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

20

Unidad 5 - Interpolación					
Esquema de cálculo					
k	x _k	Dif. div. 0 f[x _k]=f(x _k)=y _k	Dif. div. 1 f[x _k ,x _{k+1}]	Dif. div. 2 f[x _k ,x _{k+1} ,x _{k+2}]	Dif. div. n f[x ₀ ,...,x _n]
0	x ₀	f[x ₀]=b ₀			
			f[x ₀ ,x ₁]=b ₁		
1	x ₁	f[x ₁]		f[x ₀ ,x ₁ ,x ₂]=b ₂	
			f[x ₁ ,x ₂]		
2	x ₂	f[x ₂]		f[x ₁ ,x ₂ ,x ₃]	
			f[x ₂ ,x ₃]		f[x ₀ ,...,x _n]=b _n
3	x ₃	f[x ₃]		...	
...	...	...	...	...	
n-1	x _{n-1}	f[x _{n-1}]		f[x _{n-2} ,x _{n-1} ,x _n]=b ₂	
			f[x _{n-1} ,x _n]=b ₁		
n	x _n	f[x _n]=b ₀			

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

21

Unidad 5 - Interpolación					
Estimación del error para el polinomio interpolante de Newton					
Se puede demostrar que si existe una función f definida sobre el intervalo $[x_0, x_n]$, n veces diferenciable, entonces existe $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que:					
$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$					
Considerando la fórmula del error de Lagrange:					
$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$					
donde $\xi(x)$ es un número que depende de x y $\xi(x) \in [x_0, x_n]$.					
Usando la forma de Newton del polinomio interpolante de grado menor o igual que $n + 1$ para f en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n, x$, se tiene que:					
$E(x) = f(x) - p_n(x) \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$					

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

22

Unidad 5 - Interpolación					
x _k	f(x)=f[x _k]	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones progresivas:

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$p_1(x) = 0,5103757 + 0,052043(x - 2)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

23

Unidad 5 - Interpolación					
x _k	f(x)=f[x _k]	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones progresivas:

$$p_2(x) = p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$p_2(x) = 0,5103757 + 0,052043(x - 2) - 0,2597275(x - 2)(x - 2,2)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

24

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones progresivas:

$$p_3(x) = p_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$p_3(x) = \mathbf{0,5103757} + \mathbf{0,052043}(x - 2) - \mathbf{0,2597275}(x - 2)(x - 2,2) +$$
$$+ \mathbf{0,04299367}(x - 2)(x - 2,2)(x - 2,4)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

25

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones progresivas:

$$p_4(x) = p_3(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$p_4(x) = \mathbf{0,5103757} + \mathbf{0,052043}(x - 2) - \mathbf{0,2597275}(x - 2)(x - 2,2) +$$
$$+ \mathbf{0,04299367}(x - 2)(x - 2,2)(x - 2,4) + \mathbf{0,008341125}(x - 2)(x - 2,2)(x - 2,4)(x - 2,6)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

26

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones regresivas:

$$p_1'(x) = f[x_4] + f[x_4, x_3](x - x_4)$$
$$p_1'(x) = \mathbf{0,4359160} - \mathbf{0,227073}(x - 2,8)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

27

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones regresivas:

$$p_2'(x) = p_1'(x) + f[x_4, x_3, x_2](x - x_4)(x - x_3)$$
$$p_2'(x) = \mathbf{0,4359160} - \mathbf{0,227073}(x - 2,8) - \mathbf{0,2041313}(x - 2,8)(x - 2,6)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

28

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones regresivas:

$$p_3'(x) = p_2'(x) + f[x_4, x_3, x_2, x_1](x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)$$
$$p_3'(x) = 0,4359160 - 0,227073(x - 2,8) -$$
$$-0,2041313(x - 2,8)(x - 2,6) + 0,04966667(x - 2,8)(x - 2,6)(x - 2,4)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

x_k	$f(x)=f[x_k]$	Dif. Div. 1	Dif. Div. 2	Dif. Div. 3	Dif. Div. 4
2.0	0.5103757				
		0.052043			
2.2	0.5207843		-0.2597275		
		-0.051848		0.04299367	
2.4	0.5104147		-0.2339313		0.008341125
		-0.1454205		0.04966667	
2.6	0.4813306		-0.2041313		
		-0.227073			
2.8	0.4359160				

Aproximaciones regresivas:

$$p_4'(x) = p_3'(x) + f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$
$$p_4'(x) = 0,4359160 - 0,227073(x - 2,8) - 0,2041313(x - 2,8)(x - 2,6) +$$
$$+ 0,04966667(x - 2,8)(x - 2,6)(x - 2,4) + 0,008341125(x - 2,8)(x - 2,6)(x - 2,4)(x - 2,2)$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Gráficamente

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo

Aproximaciones progresivas expresadas en forma estandar:

$$p_1(x) = 0.5103757 + 0.052043(x - 2.0) = 0.0520429 \cdot x + 0.406289$$
$$p_2(x) = p_1(x) - 0.2597275(x - 2.0)(x - 2.2) = 0.5103757 + 0.052043(x - 2.0) - 0.2597275(x - 2.0)(x - 2.2) = 0.0520429 \cdot x + 0.406289 - 0.259727 \cdot x^2 + 1.09085 \cdot x - 1.14279 = -0.259727 \cdot x^2 + 1.14289 \cdot x - 0.736500$$
$$p_3(x) = p_2(x) + 0.04299367(x - 2.0)(x - 2.2)(x - 2.4) = 0.5103757 + 0.052043(x - 2.0) - 0.2597275(x - 2.0)(x - 2.2) + 0.04299367(x - 2.0)(x - 2.2)(x - 2.4) = 0.0429935 \cdot x^3 - 0.543484 \cdot x^2 + 1.76544 \cdot x - 1.19052$$
$$p_4(x) = p_3(x) + 0.008341125(x - 2.0)(x - 2.2)(x - 2.4)(x - 2.6) = 0.5103757 + 0.052043(x - 2.0) - 0.2597275(x - 2.0)(x - 2.2) + 0.04299367(x - 2.0)(x - 2.2)(x - 2.4) + 0.008341125(x - 2.0)(x - 2.2)(x - 2.4)(x - 2.6) = 0.00834111 \cdot x^4 - 0.0337447 \cdot x^3 - 0.279571 \cdot x^2 + 1.36333 \cdot x - 0.961508$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Desventajas de los polinomios interpolantes

- A medida que aumentan la cantidad de puntos aumenta el grado del polinomio
- Un polinomio de grado muy alto puede tener oscilaciones muy marcadas, por lo que puede no ser apto para interpolar o representar una función

Esto sugiere que se intente la interpolación localmente, es decir, por subintervalos.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

33

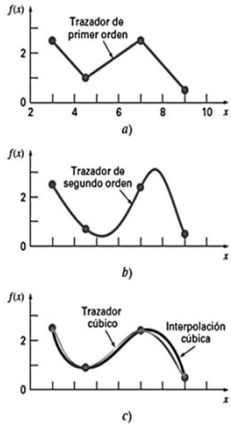
Unidad 5 - Interpolación

Interpolación por segmentos

El proceso de aproximación sobre subintervalos se conoce como **interpolación segmentaria** o **por segmentos**.

- **La interpolación segmentaria lineal** interpola entre dos puntos consecutivos con un polinomio lineal
- **La interpolación segmentaria cuadrática** interpola entre dos puntos consecutivos con un polinomio cuadrático
- **La interpolación segmentaria cúbica** interpola entre dos puntos consecutivos con un polinomio cúbico

El conjunto de los distintos polinomios constituye un **trazador**.



a) Trazador de primer orden

b) Trazador de segundo orden

c) Trazador cúbico

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

34

Unidad 5 - Interpolación

Trazador cúbico

Para asegurar que las derivadas m -ésimas sean continuas en los nodos, se debe emplear un trazador de un grado de, al menos, $m + 1$.

En la práctica se usan con más frecuencia polinomios de tercer grado o trazadores cúbicos que aseguran primera y segunda derivadas continuas.

Son n polinomios de grado menor o igual que tres y cada uno con cuatro coeficientes incógnitas, así que tenemos un total de $4n$ **incógnitas** por determinar (a_k, b_k, c_k, d_k) .

$$p_3^{(k)}(x) \equiv p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

con $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

35

Unidad 5 - Interpolación

Interpolación segmentaria cúbica (Spline Cúbico)

Las condiciones que deben satisfacer tales polinomios son:

i) $\begin{cases} p_k(x_k) = f(x_k), & k = 0, 1, \dots, n - 1 \\ p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases}$
Condiciones de interpolación. $(n + 1)$ ecuaciones

ii) $p_k(x_{k+1}) = p_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n - 2$
Condiciones de continuidad en los nodos interiores. $(n - 1)$ ecuaciones

iii) $p_k'(x_{k+1}) = p_{k+1}'(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n - 2$
Condiciones de derivabilidad en los nodos interiores. $(n - 1)$ ecuaciones

iv) $p_k''(x_{k+1}) = p_{k+1}''(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n - 2$
Condiciones de continuidad de la primera derivada en los nodos interiores: se conserva la concavidad en la vecindad del nodo interior, a no ser que la segunda derivada sea cero en el nodo interior. $(n - 1)$ ecuaciones.

Hasta aquí tenemos $n + 1 + 3(n - 1) = 4n - 2$ condiciones.

Se satisface uno de los siguientes pares de **condiciones de frontera**:

v) a- $p_0''(x_0) = 0$ y $p_{n-1}''(x_n) = 0$ b- $p_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $p_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

36

Unidad 5 - Interpolación

Trazador cúbico

Dados n puntos $[x_0, x_n]$, un **trazador cúbico** es un conjunto de n polinomios cúbicos $p_k(x)$, cada uno definido en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$.

$T(x) = p_k(x)$ para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ cumple las condiciones i) a v). Si el **trazador cúbico** satisface las condiciones v)a- se llama **natural**, y si satisface las condiciones v)b- se llama **de frontera sujeta**.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

37

Unidad 5 - Interpolación

Sea $p_3^{(k)}(x) \equiv p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$ con $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Por i): $p_k(x_k) = f(x_k) = a_k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ y $p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$

Por ii): $p_k(x_{k+1}) = p_{k+1}(x_{k+1})$ entonces:
 $a_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3 = a_{k+1}$
Si $h_k = x_{k+1} - x_k$ entonces:
 $a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = a_{k+1}$ (1)

Por iii): $p_k'(x_{k+1}) = p_{k+1}'(x_{k+1})$ entonces:
 $b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}$ (2)

Por iv): $p_k''(x_{k+1}) = p_{k+1}''(x_{k+1})$ entonces:
 $2c_k + 6d_k h_k = 2c_{k+1}$
Despejando d_k se obtiene:
 $d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$ (3)

Reemplazando (3) en (1) y despejando b_k se obtiene:
 $b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

38

Unidad 5 - Interpolación

Reemplazando los b_k y b_{k+1} en (2):
$$h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = \frac{3}{h_{k+1}}(a_{k+2} - a_{k+1}) - \frac{3}{h_k}(a_{k+1} - a_k)$$

Reemplazando en cada punto se determina un sistema de ecuaciones $AX = B$, con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando frontera natural
Primera y última fila=0

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

39

Unidad 5 - Interpolación

En el caso de condiciones de frontera sujeta, $p_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $p_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ la primera y última fila se modifican de la siguiente manera:

Como $p_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$ entonces:
 $p_0'(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2$
 $p_0'(x_0) = b_0$

Como $b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$ entonces:
 $b_0 = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$

Entonces:
 $p_0'(x_0) = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$
 $f'(x_0) = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$

Despejando c_0 y c_1 se obtiene:
 $2h_0 c_0 + h_0 c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

40

Unidad 5 - Interpolación

Como $p_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3$ entonces:
$$p_{n-1}'(x) = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x - x_{n-1})^2$$

Especializando en x_n :

$$p_{n-1}'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

Entonces:

$$f'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

Como $b_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$ y $d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k}$ entonces:

$$f'(x_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3\frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}}h_{n-1}^2$$

Despejando c_{n-1} y c_n se obtiene:

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

41

Unidad 5 - Interpolación

Por lo tanto, en el caso de condiciones de frontera sujeta se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & & 0 \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) - 3f'(x_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

42

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo: Condición de frontera natural

k	x_k	$f(x_k)=3xe^{x_k}-2e^{x_k}$	$h_k=x_{k+1}-x_k$
0	1.00	2.718282	0.05
1	1.05	3.286299	0.02
2	1.07	3.527609	0.03
3	1.10	3.905416	

Adoptando $p_0''(x_0) = 0$ y $p_3''(x_3) = 0$ entonces $c_0 = 0$ y $c_3 = 0$. Por lo tanto, se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ 0,05c_0 + 2 \times 0,07c_1 + 0,02c_2 = \frac{3}{0,02}(3,527609 - 3,286299) - \frac{3}{0,05}(3,286299 - 2,718282) \\ 0,02c_1 + 2 \times 0,05c_2 + 0,03c_3 = \frac{3}{0,03}(3,905416 - 3,527609) - \frac{3}{0,05}(3,527609 - 3,286299) \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

43

Unidad 5 - Interpolación

La solución del sistema es:

$$c_0 = 0, c_1 = 13,22529, c_2 = 13,19694, c_3 = 0$$

Como $b_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$ entonces:

$$b_0 = 11,13992, b_1 = 11,80118, b_2 = 12,32963$$

Como $d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k}$ entonces:

$$d_0 = 88,16863, d_1 = -0,4725490, d_2 = -146,6327$$

Como:

$$T(x) \rightarrow p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

entonces:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 2,718282 + 11,13992(x - 1) + 0(x - 1)^2 + 88,16863(x - 1)^3 \\ p_1(x) &= 3,286299 + 11,80118(x - 1,05) + 13,22529(x - 1,05)^2 - 0,4725490(x - 1,05)^3 \\ p_2(x) &= 3,527609 + 12,32963(x - 1,07) + 13,19694(x - 1,07)^2 - 146,6327(x - 1,07)^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

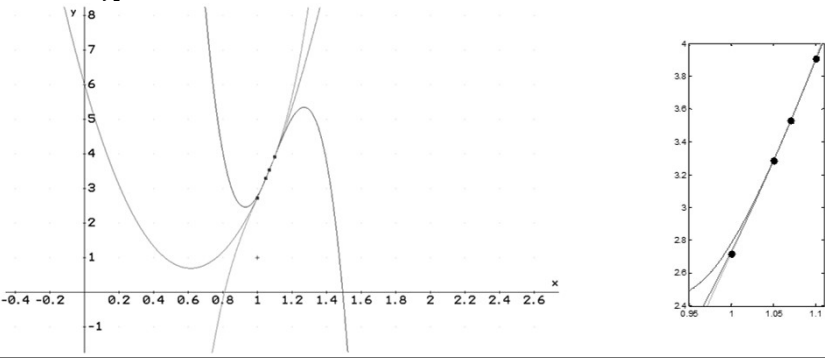
$$\begin{aligned} f(1,03) = T(1,03) = p_0(1,03) &= 2,718282 + 11,13992(1,03 - 1) + 88,16863(1,03 - 1)^3 \\ f(1,03) &= 3,054860 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

44

Unidad 5 - Interpolación

$$p_0(x) = 88,16863x^3 - 264,50589x^2 + 275,64581x - 96,590268$$
$$p_1(x) = -0,472549x^3 + 14,71381935x^2 - 17,5348848174x + 6,02297676112$$
$$p_2(x) = -146,6327x^3 + 483,887907x^2 - 519,55115629x + 185,075444212$$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

45

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo: Condición de frontera sujeta

k	x _k	f(x _k)=3xe ^x -2e ^x	h _k =x _{k+1} -x _k	f'(x _k)=e ^x +3xe ^x
0	1.00	2.718282	0.05	10.8731
1	1.05	3.286299	0.02	11.8593
2	1.07	3.527609	0.03	12.2737
3	1.10	3.905416		12.9179

Adoptando $p_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $p_2'(x_3) = f'(x_3)$ entonces:
$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \text{ y } h_2c_2 + 2h_2c_3 = 3f'(x_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2).$$

Así que se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2 \times 0,05c_0 + 0,05c_1 = \frac{3}{0,05}(3,286299 - 2,718282) - 3 \times 10,8731 \\ 0,05c_0 + 2 \times 0,07c_1 + 0,02c_2 = \frac{3}{0,02}(3,527609 - 3,286299) - \frac{3}{0,05}(3,286299 - 2,718282) \\ 0,02c_1 + 2 \times 0,05c_2 + 0,03c_3 = \frac{3}{0,03}(3,905416 - 3,527609) - \frac{3}{0,05}(3,527609 - 3,286299) \\ 0,03c_2 + 2 \times 0,03c_3 = 3 \times 12,9179 - \frac{3}{0,03}(3,905416 - 3,527609) \end{cases}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

46

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo: Condición de frontera sujeta

$$\begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,14 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0,1 & 0,03 \\ 0 & 0 & 0,03 & 0,06 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4617 \\ 2,1155 \\ 1,5842 \\ 0,9730 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,5108 \\ 10,2124 \\ 10,5112 \\ 10,9611 \end{bmatrix}$$

Como $b_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1})$ y $d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k}$ entonces:

k	x _k	a _k =f(x _k)	b	c	d	h _k	f'(x _k)=e ^x +3xe ^x
0	1.00	2.7183	10.8728	9.5108	4.6773	0.05	10.8731
1	1.05	3.2863	11.8588	10.2124	4.98	0.02	11.8593
2	1.07	3.5276	12.2735	10.5112	4.9985	0.03	12.2737
3	1.10	3.9054		10.9611			12.9179

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

47

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo: Condición de frontera sujeta

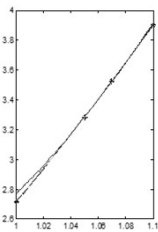
k	x _k	a=f(x)	b	c	d
0	1.00	2.7183	11.0994	9.5108	4.6773
1	1.05	3.2863	11.8091	10.2124	4.98
2	1.07	3.5276	12.3238	10.5112	4.9985
3	1.10	3.9054		10.9611	

Como:

$$T(x) \rightarrow p_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

entonces:

$$p_0(x) = 2,7183 + 11,0994(x - 1) + 9,5108(x - 1)^2 + 4,6773(x - 1)^3$$
$$p_1(x) = 3,2863 + 11,8091(x - 1,05) + 10,2124(x - 1,05)^2 + 4,98(x - 1,05)^3$$
$$p_2(x) = 3,5276 + 12,3238(x - 1,07) + 10,5112(x - 1,07)^2 + 4,9985(x - 1,07)^3$$



Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

48

Unidad 5 - Interpolación

Ventajas y desventajas del trazador cúbico

- El algoritmo consiste en resolver un sistema de ecuaciones.
- El sistema de ecuaciones es tridiagonal, con lo cual se puede simplificar la resolución.
- Se pueden obtener soluciones con menos oscilaciones cuando hay muchos puntos.
- Es adecuado para describir formas eligiendo los puntos adecuados.

- Para realizar una interpolación es necesario identificar el polinomio correspondiente.
- Cualquier cálculo aplicado al trazador tiene que repetirse para cada polinomio, lo cual puede ser complicado cuando hay muchos puntos.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Ajuste de un polinomio por mínimos cuadrados (regresión polinomial)

Encontrar el polinomio que "mejor se ajuste" a los datos en el sentido de que la distancia entre los puntos dados y los obtenidos mediante un polinomio sea mínima.

$$\left(\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2\right)^{1/2} \quad o \quad \sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2$$

Este criterio se conoce como **mínimos cuadrados**, y el método para obtener los polinomios que mejor se ajustan según mínimos cuadrados se llama **Regresión polinomial**.

Encontrar $p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, con $m < n$ tal que:

$$s(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k)^2$$

sea mínima.

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Una condición necesaria para la existencia de un mínimo relativo de la función s es que las derivadas parciales con respecto a a_j , con $j = 0, 1, \dots, m$, sean cero. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a_0} &= \sum_{k=0}^n 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial a_1} &= \sum_{k=0}^n 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k)x_k = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial a_2} &= \sum_{k=0}^n 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k)x_k^2 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial s}{\partial a_j} &= \sum_{k=0}^n 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k)x_k^j = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial s}{\partial a_m} &= \sum_{k=0}^n 2(a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k)x_k^m = 0 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

Si anulamos el 2 y remplazamos $\sum_{k=0}^n a_0 = (n+1)a_0$ obtenemos un sistema de $m+1$ ecuaciones lineales con $m+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ denominado **sistema de ecuaciones normales**:

$$\begin{aligned} (n+1)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^m\right)a_m &= \sum_{k=0}^n y_k \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^3\right)a_2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{m+1}\right)a_m &= \sum_{k=0}^n x_k y_k \\ &\vdots \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k^j\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{1+j}\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{2+j}\right)a_2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{m+j}\right)a_m &= \sum_{k=0}^n x_k^j y_k \\ &\vdots \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k^m\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{1+m}\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{2+m}\right)a_2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n x_k^{2m}\right)a_m &= \sum_{k=0}^n x_k^m y_k \end{aligned}$$

En general:

$$\sum_{i=0}^m \left(a_i \sum_{k=0}^n x_k^{i+j} \right) = \sum_{k=0}^n x_k^j y_k \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

Unidad 5 - Interpolación

En el caso particular en que $m = 1$, $p(x) = a_0 + a_1x_1$ es la **recta de mínimos cuadrados** donde a_0 y a_1 se obtienen resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n x_k^0\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^1\right)a_1 = \sum_{k=0}^n y_k \\ \left(\sum_{k=0}^n x_k^1\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^n x_k^2\right)a_1 = \sum_{k=0}^n x_k y_k \end{cases}$$

Medir el **error** es estimar la bondad del ajuste según mínimos cuadrados. Para N =cantidad de puntos $(n + 1)$:

i) Error:

$$E = \sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2$$

ii) Error cuadrático medio:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N}}$$

iii) Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N - m - 1}$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

53

Unidad 5 - Interpolación

Ejemplo

k	x _k	y _k
0	0	-1
1	2	0
2	3	2
3	5	1

a) $p_1(x) = a_0 + a_1x$
b) $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

k	x _k	x _k ²	x _k ³	x _k ⁴	y _k	x _k y _k	x _k ² y _k
0	0	0	0	0	-1	0	0
1	2	4	8	16	0	0	0
2	3	9	27	81	2	6	18
3	5	25	125	625	1	5	25
$\sum_{k=0}^3$	10	38	160	722	2	11	43

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

54

Unidad 5 - Interpolación

a) Sea: $p_1(x) = a_0 + a_1x$. Entonces el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^3 x_k^0\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^1\right)a_1 = \sum_{k=0}^3 y_k \\ \left(\sum_{k=0}^3 x_k^1\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^2\right)a_1 = \sum_{k=0}^3 x_k y_k \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 2 \\ 10a_0 + 38a_1 = 11 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que la solución es:

$$a_0 = -\frac{17}{26} \approx 0,654$$
$$a_1 = \frac{6}{13} \approx 0,461$$

Por lo tanto:

$$p_1(x) = -\frac{17}{26} + \frac{6}{13}x$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

55

Unidad 5 - Interpolación

b) Sea: $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Entonces el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^3 x_k^0\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^1\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^2\right)a_2 = \sum_{k=0}^3 y_k \\ \left(\sum_{k=0}^3 x_k^1\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^2\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^3\right)a_2 = \sum_{k=0}^3 x_k y_k \\ \left(\sum_{k=0}^3 x_k^2\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^3\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^3 x_k^4\right)a_2 = \sum_{k=0}^3 x_k^2 y_k \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 + 38a_2 = 2 \\ 10a_0 + 38a_1 + 160a_2 = 11 \\ 38a_0 + 160a_1 + 722a_2 = 43 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que la solución es:

$$a_0 = -\frac{15}{13}, a_1 = \frac{101}{78}, a_2 = -\frac{1}{6}$$

Por lo tanto:

$$p_2(x) = -\frac{15}{13} + \frac{101}{78}x - \frac{1}{6}x^2$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

56

Unidad 5 - Interpolación

x_k	0	2	3	5
y_k	-1	0	2	1
$p_1(x_k)$	-.654	.269	.731	1.65
$y_k - p_1(x_k)$	-.346	-.269	1.27	-.65
$p_2(x_k)$	-1.15	.769	1.23	1.15
$y_k - p_2(x_k)$	.15	-.769	.77	-.15

a)
$$E = \sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2 = (-0,346)^2 + (-0,269)^2 + (1,27)^2 + (-0,65)^2 = 2,23$$
$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N}} = \sqrt{\frac{2,23}{4}} = 0,747$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N - m - 1} = \frac{2,23}{4 - 1 - 1} = 1,115$$

b)
$$E = \sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2 = 1,23$$
$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1,23}{4}} = 0,555$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=0}^n (p_m(x_k) - y_k)^2}{N - m - 1} = \frac{1,23}{4 - 2 - 1} = 1,23$$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

57

Unidad 5 - Interpolación

Gráficamente

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

58

Unidad 5 - Interpolación

Variantes de la regresión lineal

La función potencial

La función potencial $y = c x^a$ se puede transformar en:
 $\log y = a \log x + \log c$
Usando nuevas variables $x' = \log x$, $y' = \log y$, $b = \log c$ obtenemos la relación lineal $y' = ax' + b$, como:
 $x' = \log x \Rightarrow c = 10^b$

Ejemplo:

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91	2,01	2,11

$x' = \log x$	1,0	1,3	1,477	1,6	1,699	1,778	1,845	1,903
$y' = \log y$	0,025	0,124	0,182	0,225	0,258	0,281	0,303	0,324

```
xx=log10(x)
yy=log10(y)
p=polyfit(xx,yy,1)
hold on
plot(x,10^p(2)*x.^p(1))
```

$p = [0.3306 \ -0.3056]$
 $a=0.3306$
 $c=10^{-0.3056}=0.4948$
 $y=0.4948 \cdot x^{0.3306}$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

59

Unidad 5 - Interpolación

Variantes de la regresión lineal

La función exponencial

La función exponencial $y = c e^{ax}$, se puede transformar en: $\ln y = ax + \ln c$
Usando nuevas variables $x' = x$ e $y' = \ln y$ obtenemos la relación lineal $y' = ax' + b$, donde $b = \ln c \Rightarrow c = e^b$

Ejemplo:

x	12	41	93	147	204	264	373	509	773
y	930	815	632	487	370	265	147	76	17

$x' = x$	12	41	93	147	204	264	373	509	773
$y' = \ln y$	6,835	6,703	6,449	6,188	5,913	5,580	4,990	4,330	2,833

```
yy=log(y)
p=polyfit(x,yy,1)
hold on
plot(x,exp(p(2))*exp(p(1)*x))
```

$p = [-0.0052 \ 6.9440]$
 $a=-0.0052$
 $c=e^{6.9440}= 1.0369e+003$
 $y= 1.0369e+003 \cdot e^{-0.0052 \cdot x}$

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

60

Unidad 5 - Interpolación

Instrucciones Matlab

YI = Interp1(X,Y,XI,metodo) Interpola entre puntos **X,Y**; **X** vector de valores x, **Y** vector de valores y, **XI** valor a interpolar,

YI resultado de la interpolación en **XI**, **método**:

- 'nearest' - redondeo al valor más cercano
- 'linear' - interpolación lineal
- 'spline' - interpolación segmentaria cubica Spline
- 'cubic' - aproxima a un polinomio cúbico

YI = spline(X,Y,XI) Evalúa XI

P = spline(X,Y) Devuelve los coeficientes de los polinomios en formato “pp”

[X,coef,npol,nterm,dim] = unmkpp(P) Recupera información de los polinomios

YI = ppval(P,XI) Evalúa polinomios “pp” en un punto

[coef,P] = polyfit(X,Y,N) Ajusta X,Y con un polinomio de grado N, (por mínimos cuadrados), **coef** son los coeficientes del polinomio y P es el polinomio “pp” para ser evaluado con ppval

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020